Казанский (Приволжский) федеральный университет

Институт вычислительной математики и информационных технологий

Отчет

по дисциплине «Численные методы прикладной математики»

по теме

«Решение стационарного уравнения теплопроводности   
методом конечных разностей»

Работу выполнил (а): Шабаков Ильвар Жомортханович

Группа: 09-822

Проверил: Конюхов Владимир Михайлович

**Казань – 2020**

Оглавление

[**1.** **УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ** 3](#_Toc40466669)

[**2.** **ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ** 4](#_Toc40466670)

[**3.** **АНАЛИЗ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ СХЕМЫ** 5](#_Toc40466671)

[**4.** **АНАЛИЗ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СХЕМЫ** 6](#_Toc40466672)

[**5.** **АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ПРОГОНКИ** 7](#_Toc40466673)

[**6.** **СРАВНЕНИЕ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ** 7](#_Toc40466674)

[**7.** **ПОРЯДОК СХОДИМОСТИ**  9](#_Toc40466675)

[**8.** **УСТОЙЧИВОСТЬ** 10](#_Toc40466676)

# **УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Уравнения параболического типа (УПТ) возникают в задачах теплопроводности, фильтрации, диффузии и т.д. Общий вид одномерного УПТ:

**, , ;** (1.1)

***н.у.:*** , ***г.у.:***  ,(1.2)

где  – коэффициент теплопроводности сплошной среды, , , и  – заданные функции, а на границах области заданы граничные условия первого рода.

Рассмотрим частный случай уравнений (1), (2), описывающих процесс стационарной теплопроводности на отрезке :

**, ,** (1.3)

***г.у.:***  ,(1.4)

при постоянных значениях  и . (3) – одномерное уравнение эллиптического типа.

Будем искать приближенное решение задачи (3), (4) методом конечных разностей и численно исследовать ее сходимость и устойчивость.

В работе рассматривается исследование задачи при следующих исходных данных:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Вариант*** |  |  |  |  |  |  |
| ***7*** |  |  |  |  | 0 | 1 |

При исследовании сходимости и устойчивости схем используется точное общее решение задачи (1.3), (1.4), которое имеет вид:

(1.5)

.

*.*

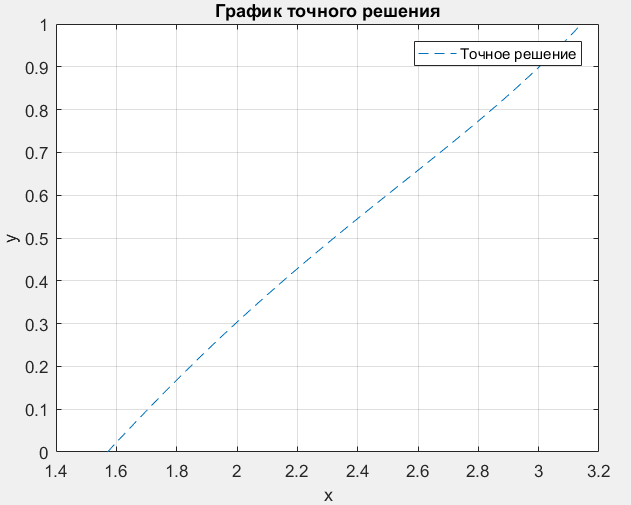


Рис.1.1 График точного решения при N=100(кол-во узлов).

# **ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ**

Введем *равномерную сетку* с постоянным шагом , равным расстоянию между соседними узлами сетки. Разностная сетка  есть конечное множество узлов . Аппроксимируем в произвольной точке  вторую производную уравнения (3), представив сначала ее следующим образом:

. (2.1)

Теперь заменим производную

 (2.2)

в точке  с использованием так называемых «дробных» узлов , симметрично расположенных относительно точки  на расстоянии половины шага . Замена делается аналогично аппроксимации первой производной ОДУ в задании 1. Далее нужно записать разностные выражения для величин  и  в точках , выразив их через значения ,   искомой дискретной функции в «целых» узлах , ,  которые теперь, в свою очередь, симметричны относительно дробных узлов  и 

, . (2.3)

Таким образом, разностный аналог правой части уравнения (2.1) с учетом соотношений (2.2) и (2.3) запишется в следующем виде:

. (2.4)

Обозначив в (2.4) через ,  и собирая подобные, запишем разностное уравнение, аппроксимирующее нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка (1.3) с произвольной правой частью  и коэффициентом теплопроводности  с порядком аппроксимации :

, . (2.5)

Граничные условия (1.4) аппроксимируем в узлах  и  соотношениями:

, . (2.6)

Таким образом, в силу нелинейности функции  для построения неизвестных значений сеточной функции  во всех узлах сетки  при  в общем случае необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений (2.5), (2.6). Для ее линеаризации можно применить, например, метод Ньютона. Но в дальнейшем мы ограничимся решением квазилинейного уравнения теплопроводности, в котором коэффициент  зависит только от , т.е. . В этом случае значения

 и 

при заданной зависимости  легко вычисляются. Тогда, вводя обозначения , , , , запишем систему уравнений (2.5) в виде, принятом при использовании метода прогонки:

 , . (2.7)

Итак, полученная разностная схема представляет собой систему алгебраических уравнений, которая в матричной форме будет иметь вид:

.

Нетрудно видеть, что эта система имеет трехдиагональную матрицу. Такие системы решаются методом прогонки. При этом в рассматриваемом случае граничных условий первого рода , , , , , .

Полученная система уравнений имеет вид:

, .(a)

Сеточные функции  вычисляются по общей рекуррентной формуле:

, ,(b)

где  - неизвестные коэффициенты. С помощью (b) перепишем уравнения (а):





Это равенство выполняется, если равны нулю квадратные скобки, откуда для  получим:

,  (c)

Из аппроксимации граничных условий имеем:



или (d)

где 

Расчет начинается при  с ***прямой прогонки*** по формулам (с), а затем по формулам (b) выполняется ***обратная прогонка*** при .

# **АНАЛИЗ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ СХЕМЫ**

Схема (2.5) аппроксимирует производную второго порядка и является трехточечной. Приведем ее снова к виду, подобному (2.4):

/

Обозначим разностные аппроксимации первых производных как и . Тогда схему (2.7) можно записать в виде:

.

Вычислим локальную погрешность аппроксимации схемы:

*.*

где – достаточно гладкая функция, разлагая *u* в точке *х* по формуле Тейлора, найдем

/

,

*.*

Требование будет выполнено, если

Таким образом для нашей схемы (2.7):

,

*.*

Следовательно, схема имеет второй порядок аппроксимации.

# **АНАЛИЗ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СХЕМЫ**

Рассмотрим уравнение:

С краевыми условиями 1-ого рода:

*.*

Будем предполагать, что функции и непрерывны на [а,Ь], решение краевой задачи существует и единственно на отрезке [а, Ь] и обладает необходимой гладкостью. Разобьем отрезок [а,Ь] на N равных частей с шагом h =(b-a)/N , обозначив узлы: . Приближенные значения решения в узлах будем обозначать, в отличие от точных значений решения в узлах .

*-*

это известные величины при всех і = 0,..., N. Во внутренних узлах заменим вторую производную по формуле численного дифференцирования по трем узлам на середину:

*.*

*В результате получаем:*

*,*

i-e уравнение имеет вид:

*.*

следовательно, при условии и имеет диагональное преобладание

Оценим погрешности метода. Учитывая, что для внутренних узлов выполняется

*,*

где погрешность формулы численного дифференцирования для второй производной определяется оценкой

*.*

получаем для погрешностей систему уравнений:

*.*

Используя результат об оценке решений системы с трехдиагональной матрицей, получаем:

*.*

т. е. алгоритм сходится со вторым порядком

# **АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ПРОГОНКИ**

Достаточными условиями для устойчивости формул метода прогонки являются:

.

где *A, B, C* – коэффициенты схемы (2.7). Не трудно видеть, что условия выполняются:

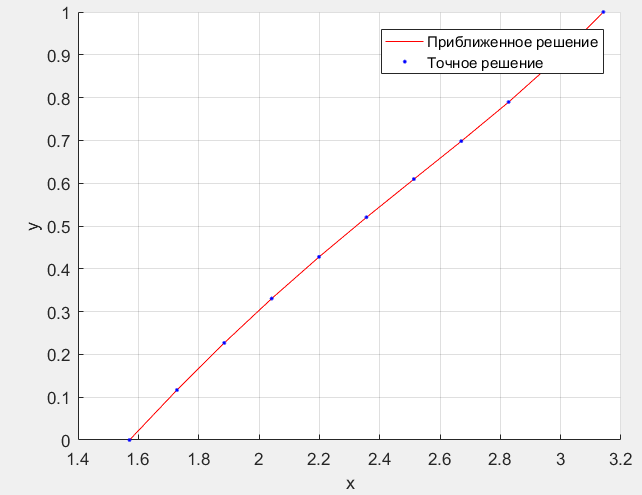
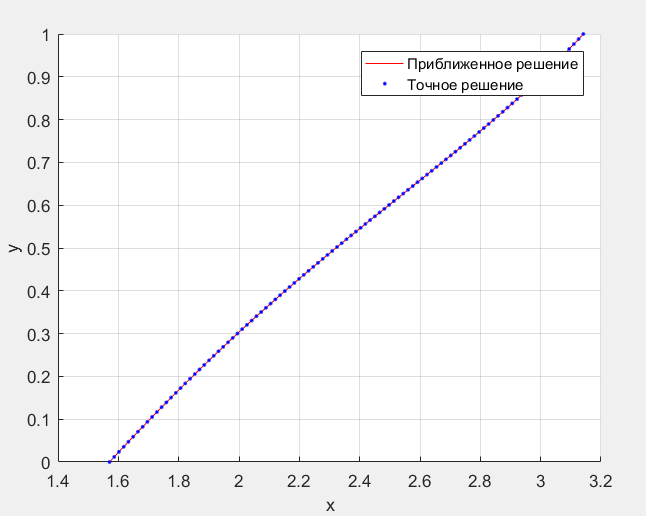
, аналогично для ,

*,*

Следовательно, решение задачи с помощью метода трехдиагональной прогонки устойчиво

# **СРАВНЕНИЕ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ**

На рис. 6.1 приведено сравнение результатов расчетов по схеме (2.7) с точным решением (1.5) при различных шагах сетки N=10 и N=100. По мере увеличения количества узлов сетки погрешность между точным и приближенным решением уменьшается.

а) б

Рис.6.1. Сравнение точного (точки) решения и приближенного (сплошная линия) решения: а - N=10, б – N=100

# **ПОРЯДОК СХОДИМОСТИ**

В Табл. 7.1 и Рис 7.1 приведены результаты расчетов по явной схеме (2.7), решенной с помощью метода прогонки, при различных порядках шага  сетки. Второй и третий столбцы таблицы содержат значения погрешности и константы , входящей по определению в соотношение . При этом ()

Табл. 7.1. Значения погрешности  схемы Эйлера при различных шагах сетки 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 10-1 | 6.4464e-05 | 0.0064 |
| 10-2 | 6.4408e-07 | 0.0064 |
| 10-3 | 6.4412e-09 | 0.0064 |
| 10-4 | 0.0065 | 0.0065 |
| 10-5 | 1.107 | 1.10714715173543 |
| 10-6 | 8875.58 | 8875.58015971734 |
|  | | **0.0064** |

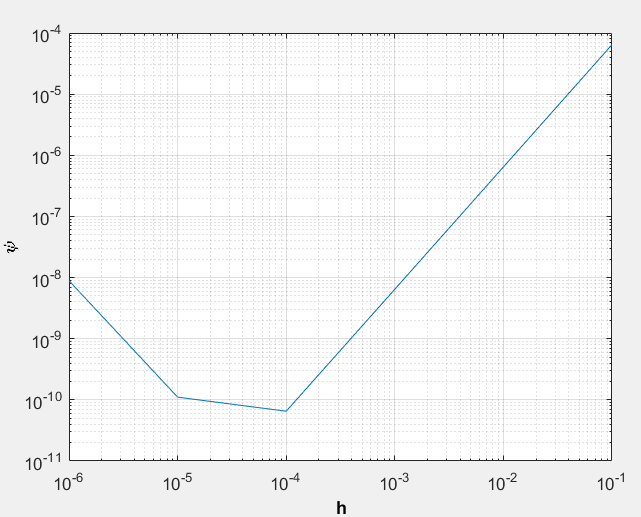


Рис. 7.1. Зависимость погрешности  от шага  сетки

Анализ результатов показывает, что в рассматриваемом случае для *h > 10-5*, т.е. скорость сходимости второго порядка. При использовании меньших *h* в MatLab начинает накапливаться ошибка арифметических операций и погрешность начинает увеличиваться. Порядок сходимости равен двум

# **УСТОЙЧИВОСТЬ**

На рис. 8.1 приведены результаты исследования устойчивости при фиксированном шаге и различных значениях параметра возмущения  начального значения функции . На графике показана близость решений при изменении граничного условия при .

На рис. 8.2 аналогичные результаты для изменений граничного условия для тех же значений

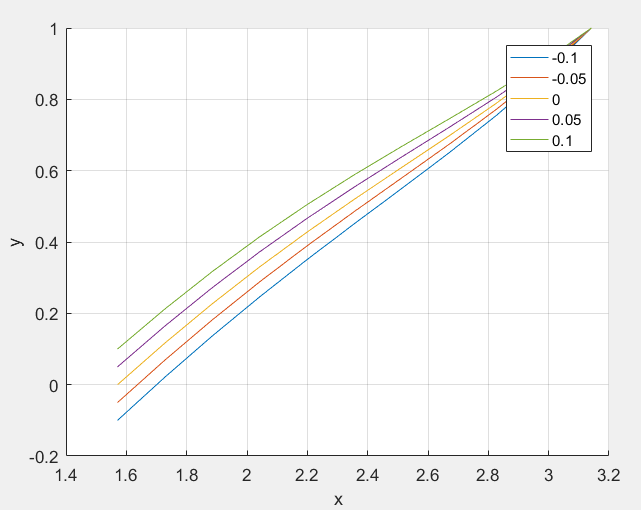


Рис. 8.1. График точных решений с различными возмущениями граничного условия

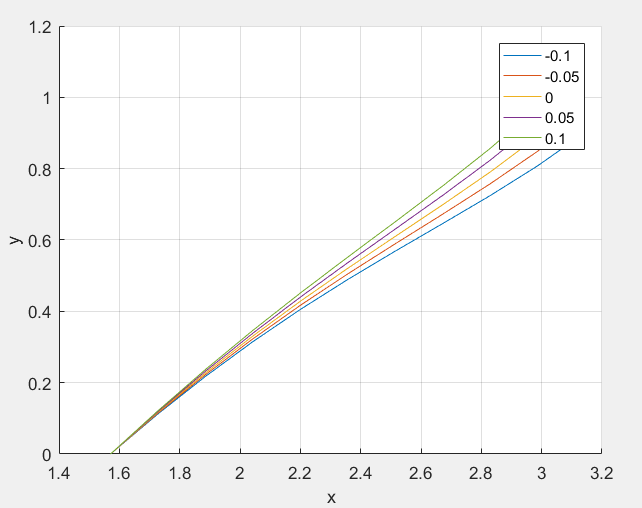


Рис. 8.2. График точных решений с различными возмущениями граничного условия

На графиках можно увидеть, что внутри интервала *[a, b]* отклонение возмущенного решения от невозмущенного не превышает при изменении любого из граничных условий. Решение устойчиво по начальным данным

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Кудашов В.Н.. Линейно-разностные уравнения. - М.: Наука, 2015. – 39 с.
2. Studfile [интернет - ресурс]- Построение трехточечной разностной схемы 2-го порядка аппроксимации: <https://studopedia.ru/12_23472_chislennie-metodi-resheniya-pravilo-runge.html>
3. mipt[интернет-ресурс] Метод Прогонки:<https://mipt.ru/drec/forstudents/study/studyMaterials/3kurs/vych_math_2.pdf>
4. В. Г. Пименов, А. Б. Ложников. Численные методы.: Наука, 2014. – 108 с.